第八章 数列

模块一 等差、等比数列问题

第 1 节 等差、等比数列的基本公式（★★）

强化训练

1．（2023·宁夏石嘴山模拟·★）记等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若$a_6+a_9=0$，$S_{11}=33$，则公差$d=$_____.

答案： -2

解析： 给了两个条件，全部用公式翻译即可求出 d，

由题意，$a_6+a_9=a_1+5d+a_1+8d=2a_1+13d=0$ ①，

$S_{11}=11a_1+\dfrac{11\times10}{2}d=11a_1+55d=33$ ②，

联立①②解得：$d=-2$.

2．（2023·全国甲卷·★）记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和. 若$a_2+a_6=10$，$a_4a_8=45$，则$S_5=$（　　）

（A）25　　（B）22　　（C）20　　（D）15

答案： C

解析： 已知和要求的都容易代公式，故直接用公式翻译，

因为$a_2+a_6=a_1+d+a_1+5d=10$，所以$a_1+3d=5$ ①，

又$a_4a_8=45$，所以$(a_1+3d)(a_1+7d)=45$，与①联立解得：$a_1=2$，$d=1$，所以$S_5=5a_1+10d=20$.

3．（2023·山西模拟·★★）设公差不为 0 的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$a_4=\dfrac{1}{2}a_5$，则$\dfrac{S_9}{S_4}=$（　　）

（A）15　　（B）1　　（C）-1　　（D）-9

答案： D

解析： 题干只给了一个等式，可用公式翻译它，建立a_1和公差 d 的关系，

因为$a_4=\dfrac{1}{2}a_5$，所以$a_1+3d=\dfrac{1}{2}(a_1+4d)$，整理得：$a_1=-2d$，故$\dfrac{S_9}{S_4}=\dfrac{9a_1+36d}{4a_1+6d}=\dfrac{-18d+36d}{-8d+6d}=-9$.

4．（2022·江苏南京模拟·★★）把 120 个面包全部分给 5 个人，使每人所得面包个数成等差数列，且较大的三份之和是较小的两份之和的 7 倍，则最小一份面包的个数为（　　）

（A）2　　（B）5　　（C）6　　（D）11

答案： A

解析： 先把文字信息翻译成数列问题，设 5 个人分到的面包从少到多依次为a_1，a_2，…，a_5，

设$\{a_n\}$的公差为d，前n项和为S_n，由题意，$\begin{cases}a_3+a_4+a_5=7(a_1+a_2)\\S_5=120\end{cases}$，

所以$\begin{cases}a_1+2d+a_1+3d+a_1+4d=7(a_1+a_1+d)\\5a_1+10d=120\end{cases}$，解得：$a_1=2$.

5.（2023·北京海淀模拟·★★）在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_3=10$，$a_2+a_4=-5$，则$\{a_n\}$的前5项和$S_5=$______.

答案：$\dfrac{11}{2}$

解析：要求S_5，需要a_1和q，已知的两个等式可直接套用公式翻译成a_1和q，故由此建立方程组并求解，

由题意，$\begin{cases}a_1+a_3=a_1+a_1q^2=a_1(1+q^2)=10 \quad ①\\a_2+a_4=a_1q+a_1q^3=a_1q(1+q^2)=-5 \quad ②\end{cases}$，用②除以①可得$q=-\dfrac{1}{2}$，代入①可求得$a_1=8$，

所以$S_5=\dfrac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\dfrac{8\times[1-(-\frac{1}{2})^5]}{1-(-\frac{1}{2})}=\dfrac{11}{2}$.

6.（2022·上海模拟·★★）已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，若$a_4-a_5=2a_6$，则$\dfrac{S_2}{a_3}$的值为______.

答案：6

解析：已知和所求都容易用公式翻译，故直接套用公式，

设$\{a_n\}$的公比为q，因为$a_4-a_5=2a_6$，所以$a_1q^3-a_1q^4=2a_1q^5$，解得：$q=\dfrac{1}{2}$或-1，

又$\{a_n\}$各项均为正数，所以$q=\dfrac{1}{2}$，故$\dfrac{S_2}{a_3}=\dfrac{a_1+a_2}{a_3}=\dfrac{a_1(1+q)}{a_1q^2}=\dfrac{1+q}{q^2}=6$.

7.（2022·甘肃民勤模拟·★★）已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_4=8$，$S_6=9S_3$，则$a_1=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}$　（B）1　（C）2　（D）4

答案：B

解析：给出两个条件，可建立两个关于a_1和q的方程，求解a_1，

设$\{a_n\}$的公比为q，因为$S_6=9S_3$，所以$q\neq1$，否则$S_6=2S_3$，矛盾，

所以$S_6=9S_3$即为$\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}=9\cdot\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}$，

约去$\dfrac{a_1}{1-q}$得$1-q^6=9(1-q^3)$，故$(1+q^3)(1-q^3)=9(1-q^3)$，

约去$1-q^3$可得$1+q^3=9$，解得：$q=2$，

又$a_4=a_1q^3=8$，所以$a_1=\dfrac{8}{q^3}=1$.

8.（2022·北京模拟·★★）已知等差数列$\{a_n\}$单调递增且满足$a_1+a_8=6$，则a_6的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,3)$　（B）$(3,6)$　（C）$(3,+\infty)$　（D）$(6,+\infty)$

答案：C

解析：只给了一个等式，无法求出 a_1 和 d，但可以建立它们的关系，用于对 a_6 消元，

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_6=a_1+5d$，因为 $a_1+a_8=6$，所以 $a_1+a_1+7d=6$，故 $2a_1+7d=6$ ①，

因为 $\{a_n\}$ 单调递增，所以 $d>0$，已知 d 的范围，于是消去 $a_6=a_1+5d$ 中的 a_1，用 d 表示，

由①可得 $a_1=3-\dfrac{7d}{2}$，所以 $a_6=a_1+5d=3-\dfrac{7d}{2}+5d=3+\dfrac{3d}{2}>3$.

9.（2022 •陕西西安一模 •★★★）设 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，S_3，S_9，S_6 成等差数列，且 $a_4+a_7=2a_n$，则 $n=$______.

答案：10

解析：先把 S_3，S_9，S_6 成等差数列这一条件用 a_1 和 q 翻译出来，看能得到什么，

设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由题意，$2S_9=S_3+S_6$ ①，

由①可得 $q\neq 1$，否则 $2S_9=2\times 9a_1=18a_1$，$S_3+S_6=3a_1+6a_1=9a_1$，从而 $2S_9\neq S_3+S_6$，矛盾，

所以式①即为 $2\cdot\dfrac{a_1(1-q^9)}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}$，化简得：$2q^6-q^3-1=0$，

所以 $(2q^3+1)(q^3-1)=0$，故 $q^3=-\dfrac{1}{2}$ 或 1（舍去），

接下来可把另一条件也用 a_1 和 q 翻译出来，结合 $q^3=-\dfrac{1}{2}$ 求出 n，

$a_4+a_7=2a_n\Rightarrow a_1q^3+a_1q^6=2a_1q^{n-1}\Rightarrow q^{n-1}=\dfrac{1}{2}(q^3+q^6)=-\dfrac{1}{8}=(-\dfrac{1}{2})^3=(q^3)^3=q^9$，所以 $n-1=9$，故 $n=10$.

10.（2022 • 广东模拟 • ★★★）已知 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为等差数列，若 $a_1=b_2=6$，$a_4+b_5=9$，则 a_7+b_8 的值是_____.

答案：6

解法 1：不知道条件怎么翻译？那就试试用通项公式来表示已知的和要求的，看看它们的联系吧，

设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的公差分别为 d_1，d_2，

由题意，$a_1=6$，$b_2=b_1+d_2=6$ ①，

$a_4+b_5=(a_1+3d_1)+(b_1+4d_2)=6+3d_1+b_1+4d_2=9$ ②，

要求的 $a_7+b_8=(a_1+6d_1)+(b_1+7d_2)=6+6d_1+b_1+7d_2$ ③，

接下来需要通过①②式得到③式的值，观察发现式③中的 d_1 只有式②有，为了得到 $6d_1$，先把式②两倍，

由②可得 $12+6d_1+2b_1+8d_2=18$ ④，

对比④和③发现正好多一个 b_1+d_2，式①就有 b_1+d_2，

由④-①可得 $12+6d_1+b_1+7d_2=12$，所以 $6d_1+b_1+7d_2=0$，

代入③得 $a_7+b_8=6$.

解法 2：已知 a_1 和 b_2，可把它们作为初始项，用来翻译条件和结论，寻找两者之间的关系，

设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的公差分别为 d_1，d_2，因为 $a_4+b_5=$

$a_1+3d_1+b_2+3d_2=12+3(d_1+d_2)=9$，所以 $d_1+d_2=-1$，

故 $a_7+b_8=a_1+6d_1+b_2+6d_2=a_1+b_2+6(d_1+d_2)$

$=6+6+6\times(-1)=6$.

11．（2023 • 新高考 I 卷 • ★★★）记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，设甲：$\{a_n\}$ 为等差数列，乙：$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，则（　　）

（A）甲是乙的充分条件但不是必要条件

（B）甲是乙的必要条件但不是充分条件

（C）甲是乙的充要条件

（D）甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

答案：C

解析：判断是否为等差数列，就看通项是否为 $pn+q$ 或前 n 项和是否为 An^2+Bn 的形式，故直接设形式来分析，先看充分性，

若 $\{a_n\}$ 为等差数列，则可设 $S_n=An^2+Bn$，

此时 $\dfrac{S_n}{n}=An+B$，满足等差数列的形式特征，

所以 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列，故充分性成立；

再看必要性，此时可将 $\dfrac{S_n}{n}$ 设为等差数列的通项形式，并由此求出 a_n，加以判断，

若 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列，则可设 $\dfrac{S_n}{n}=pn+q$，

所以 $S_n=pn^2+qn$ ①，从而 $a_1=S_1=p+q$，

且当 $n\ge 2$ 时，由①得：$a_n=S_n-S_{n-1}=2pn+q-p$，

显然 $a_1=p+q$ 也满足上式，所以 a_n 满足等差数列的通项形式，

从而 $\{a_n\}$ 是等差数列，必要性成立，故选 C.

【反思】$\{a_n\}$ 是等差数列的充要条件是通项为 $pn+q$ 的形式，或前 n 项和 S_n 为 An^2+Bn 的形式，熟悉这一特征可巧解一些等差数列的概念判断题.

12．（2022 • 辽宁模拟 • ★★）已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_2=b_1=3$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）在① $b_3=12$；② $a_{b_2}=11$；③ $a_2+2b_2=3a_3$ 这三个条件中选一个作为已知条件，使 $\{b_n\}$ 存在且唯一，并求数列 $\{b_{a_n}\}$ 的前 n 项和 S_n.

解：（1）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则由题意，$d=a_2-a_1=2$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times 2=2n-1$.

（2）设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，若选①，则 $\dfrac{b_3}{b_1}=q^2=\dfrac{12}{3}=4$，解得：$q=\pm 2$，数列 $\{b_n\}$ 不唯一，故不能选①.

若选②，则 $a_{b_2}=11$，（要计算 a_{b_2}，只需在 $a_n=2n-1$ 中将 n 换成 b_2 即可）

所以 $a_{b_2}=2b_2-1=11$，从而 $b_2=6$，$q=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{6}{3}=2$，故 $b_n=b_1q^{n-1}=3\times2^{n-1}$，

（接下来计算 b_{a_n}，只需在 $b_n=3\times2^{n-1}$ 中将 n 换成 a_n 即可）

所以 $b_{a_n}=3\times2^{a_n-1}=3\times2^{2n-2}=3\times4^{n-1}$，故 $S_n=3\times4^0+3\times4^1+\cdots+3\times4^{n-1}=\dfrac{3\times(1-4^n)}{1-4}=4^n-1$.

若选③，则 $a_2+2b_2=3a_3$，所以 $3+2b_2=15$，故 $b_2=6$，接下来同选②的求解过程.

13．（2023·全国乙卷·★★★）记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_2=11$，$S_{10}=40$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 T_n.

解：（1）（已知条件都容易代公式，故直接用公式翻译，求出 a_1 和 d）

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_2=a_1+d=11$ ①，

$S_{10}=10a_1+45d=40$ ②，

联立①②解得：$a_1=13$，$d=-2$，

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=13+(n-1)\times(-2)=15-2n$.

（2）（通项含绝对值，要求和，先去绝对值，观察发现 $\{a_n\}$ 前 7 项为正，从第 8 项起为负，故据此讨论）

当 $n\le7$ 时，$a_n>0$，所以 $T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$

$=a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(13+15-2n)}{2}=14n-n^2$；

当 $n\ge8$ 时，$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$

$=a_1+a_2+\cdots+a_7-a_8-a_9-\cdots-a_n$

$=2(a_1+a_2+\cdots+a_7)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

$=2\times\dfrac{7\times(13+1)}{2}-\dfrac{n(13+15-2n)}{2}=n^2-14n+98$；

综上所述，$T_n=\begin{cases}14n-n^2,n\le7\\n^2-14n+98,n\ge8\end{cases}$.